Задания муниципального этапа олимпиады по математике
7-11 класс
Задания 7класс

1. Существует ли четырехзначное натуральное число с различными ненулевыми цифрами, обладающее следующим свойством: если к нему прибавить это же число, записанное в обратном порядке, то получится число, делящееся на 101?

2. Имеется 9 карточек с числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Какое наибольшее количество этих карточек можно разложить в некотором порядке в ряд так, чтобы на любых двух соседних карточках одно из чисел делилось на другое?

3. Петя купил одно пирожное, два кекса и три бублика, Аня купила три пирожных и бублик, а Коля купил шесть кексов. Все они заплатили за покупки одинаковые суммы денег. Лена купила два пирожных и два бублика. А сколько кексов она могла бы купить на ту же потраченную ей сумму?

4. В классе 26 учащихся. Они договорились, что каждый из них будет либо лжецом (лжецы всегда лгут), либо рыцарем (рыцари всегда говорят правду). Когда они пришли в класс и сели за парты, каждый из них сказал: «Я сижу рядом с лжецом». Затем некоторые учащиеся пересели за другие парты. Мог ли после этого каждый сказать: «Я сижу рядом с рыцарем»? Каждый раз за любой партой сидело ровно двое учащихся.

5. Какое наименьшее число уголков из 3 клеток нужно покрасить в квадрате 6×6 клеток так, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя? (Покрашенные уголки не должны перекрываться.)

Задания 8 класс

1. Найдите какие-нибудь четыре различных натуральных числа, обладающих следующим свойством: если к произведению любых двух из них прибавить произведение двух остальных чисел, то получится простое число.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка K – середина AB , точка L – середина BC , точка M – середина CD , точка N – середина DA . Для некоторой точки S , лежащей внутри четырехугольника $ABCD$, оказалось, что $KS = LS$ и $NS = MS$. Докажите, что $\angle KSN = \angle MSL$.

3. Рабочие укладывали пол размера $n \times n$ плитками двух типов: 2×2 и 3×1. Оказалось, что им удалось полностью уложить пол так, что было использовано одинаковое

количества плиток каждого типа. При каких n такое могло получиться? (Резать плитки, а также накладывать их друг на друга нельзя).

4. Сумма чисел a , b и c равна нулю, а их произведение отрицательно. Докажите, что число $\frac{a^2+b^2}{c} + \frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b}$ положительно.

5. На столе лежат 300 монет. Петя, Вася и Толя играют в следующую игру. Они ходят по очереди в следующем порядке: Петя, Вася, Толя, Петя, Вася, Толя, и т. д. За один ход Петя может взять со стола 1, 2, 3 или 4 монеты, Вася – 1 или 2 монеты, а Толя – тоже 1 или 2 монеты. Могут ли Вася и Толя договориться так, что, как бы ни играл Петя, кто-то из них двоих заберет со стола последнюю монету?

Задания 9 класс

1. За круглым столом сидят 10 человек, некоторые из них – рыцари, а остальные – лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что среди них есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Какое наибольшее число из сидящих за столом может сказать: «Оба моих соседа – рыцари»? (Ложным считается утверждение, которое хотя бы частично не является верным.)

2. Пусть a и b – произвольные различные числа. Докажите, что уравнение $(x + a)(x + b) = 2x + a + b$ имеет два различных корня.

3. Пусть AL – биссектриса остроугольного треугольника ABC , а ω – описанная около него окружность. Обозначим через P точку пересечения продолжения высоты BH треугольника ABC с окружностью ω. Докажите, что если $\angle BLA = \angle BAC$, то $BP = CP$.

4. Существует ли девятизначное число без нулевых цифр, остатки от деления которого на каждую из его цифр (первую, вторую, ..., девятую) различны?

5. Имеется таблица 11×11 , из которой вырезана центральная клетка. Двое играют в следующую игру. Они по очереди ставят в пустые клетки этой таблицы крестики и нолики: первый игрок за ход ставит один крестик, а второй – один нолик. Игра заканчивается, когда все клетки таблицы заполнены. После этого вычисляются два числа: A – количество строк, в которых больше крестиков, чем ноликов, и B – количество столбцов, в которых больше ноликов, чем крестиков. (При этом средняя строка считается одной строкой из 10 клеток, а средний столбец – одним столбцом из 10 клеток.) Первый выигрывает, если $A > B$, иначе выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

Задания 10 класс

1. Найдите все корни уравнения $(x-a)(x-b)=(x-c)(x-d)$, если известно, что $a+d=b+c=2015$ и $a\neq c$ (сами числа a, b, c, d не даны).

2. Вася выбрал некоторое число x и выписал последовательность $a_1=1+x^2+x^3$, $a_2=1+x^3+x^4$, $a_3=1+x^4+x^5$, ..., $a_n=1+x^{n+1}+x^{n+2}$, ... Оказалось, что $a_2^2=a_1a_3$. Докажите, что для всех $n\geq 3$ выполняется равенство $a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}$.

3. Какое наименьшее число уголков из 3 клеток нужно покрасить в квадрате 5×5 так, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя? (Закрашенные уголки не должны перекрываться.)

4. Назовем число, большее 25, *полупростым*, если оно является суммой каких-то двух различных простых чисел. Какое наибольшее количество последовательных натуральных чисел могут оказаться полупростыми?

5. Пусть AA_1 и CC_1 – высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, а K, L и M – середины сторон AB, BC и CA соответственно. Докажите, что если $\angle C_1MA_1=\angle ABC$, то $C_1K=A_1L$.

Задания 11 класс

1. Существует ли восьмизначное число без нулевых цифр, которое при делении на свою первую цифру дает остаток 1, при делении на вторую цифру дает остаток 2, ..., при делении на восьмую цифру дает остаток 8? Цифры считаются слева направо.

2. Уравнение $(x + a)(x + b) = 9$ имеет корень $a + b$. Докажите, что $ab \leq 1$.

3. Рабочие укладывали пол размера $n \times n$ $(10 < n < 20)$ плитками двух типов: 2×2 и 5×1. Оказалось, что им удалось полностью уложить пол так, что было использовано одинаковое количества плиток каждого типа. При каких n такое могло получиться? (Резать плитки, а также накладывать их друг на друга нельзя.)

4. Середина ребра SA треугольной пирамиды $SABC$ равноудалена от всех вершин пирамиды. Пусть SH – высота пирамиды. Докажите, что $BA^2 + BH^2 = CA^2 + CH^2$.

5. Существуют ли натуральные a и b , большие тысячи, такие, что для любого c , являющегося точным квадратом, три числа a , b и c не являются длинами сторон треугольника